Stage Master2

proposé par M.Rouleux, Centre de Physique Théorique

Sujet : Vorticité sur un groupe de Lie

La vorticité intervient souvent en Physique (fluide régi par les équations d'Euler, système de spins à symétrie continue, équations de Ginzburg-Landau en supraconductivité, théories de jauge, etc...). Pour un champ vectoriel $\vec{F}$ à rotationnel non nul elle traduit la tendance qu'ont les lignes de champ à tourner, en 2-D, autour d'un point appelé *vortex* ou, en 3-D, autour d'une *ligne de vortex*. La circulation locale de $\vec{F}$ sur un lacet $\gamma = \partial\Omega$ entourant le vortex se calcule par la formule de Green

$$\oint_{\partial\Omega} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int\int_{\Omega} \langle \nabla \wedge \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

et de façon analogue en 3-D sur un "tube" entourant la ligne de vortex.

On voudrait définir la vorticité d'un champ régulier à valeurs dans une algèbre de Lie, et calculer son "logarithme" à valeurs dans le groupe de Lie correspondant.

Le cas abélien concerne les fonctions complexes. Par exemple le degré local de $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ défini par

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{df}{f} \in \mathbf{Z}$$

est non nul si f admet une singularité (vortex) en ξ à l'intérieur de γ, et peut être calculé par la formule de Green. C'est par exemple le cas pour les équations de Ginzburg-Landau.

Si de plus f est holomorphe, le calcul du degré se ramène à la formule des résidus pour la fonction méromorphe $\frac{f'}{f}$: le residu à chaque pôle est un nombre entier, la variation du logarithme de f le long de γ.

Lorsque M et N sont 2 variétés de même dimension, cette formule permet dans des cas simples de calculer le degré local d'une application $M \to N$.

Si $M \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert (not nécessairement simplement connexe), et N une algèbre de Lie non abélienne, on peut s'attendre à une théorie plus précise, au moins dans certains cas.

Soit par exemple $(\mathcal{H}^0_{2\times 2}(\mathbf{C}), \frac{i}{2}[\,\cdot\,,\,\cdot])$ l'algèbre de Lie des matrices Hermitiennes de trace nulle, qu'on identifie à $(\mathbf{R}^3, \wedge)$. Le degré local d'un champ matriciel $F : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathcal{H}^0_{2\times 2}(\mathbf{C})$ est défini comme l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial\Omega} \rho(x)$ de la 1-forme

$$\rho(x) = \frac{i}{2}[F^{-1}(x), dF(x)]$$

et peut aussi être calculé par la formule de Green. Cela permet par exemple de "mesurer" la vorticité dans le modèle de spins d'Heisenberg, classique ou quantique.

Plus généralement, soit F un champ à valeurs dans une algèbre de Lie $\mathcal{L}$, la condition pour que ρ admette des primitives locales (qu'on appellera "logarithmes" de F) à valeurs dans son groupe de Lie $\mathcal{G}$ est de vérifier l'équation de structure de Maurer-Cartan $d\rho + [\rho, \rho] = 0$.

On étudiera aussi dans ce Stage les cas où $F : D \subset \mathbf{R}^3 \to \mathrm{sl}(2; \mathbf{R})$ (matrices de trace nulle), et plus généralement $F : D \subset \mathbf{R}^{(2n+1)n} \to \mathrm{sp}(2n; \mathbf{R})$ (matrices Hamiltoniennes).

Références

[So] A.Sossinsky. Topology, Lect. Notes. Math. in Moscow. Independent University of Moscow, 2015.

[CeSa] K.Celiebak, D.Salamon. Wall crossing for symplectic vortices and quantum cohomology. Math. Ann. 335 (2006)

[DuFoNo] B.Dubrovin, A.Fomenko, S.Novikov. Modern Geometry-Methods and applications. Vol. I, II, III. Springer, 1985.

[Mil] J.Milnor. Topology from the differentiable viewpoint, Virginia Univ. Press, 1965.

[MiRo] D.Minenkov, M.Rouleux. Quantum Vorticity at positive temperature for spin systems with continuous symmetry. ISQS24, Int. Conference on Integrable Syst. and Quantum symmetries. Prague, 2016. 2017 J. Phys.: Conf. Ser. 804 012031.

[Wen] X-G.Wen. Colloquium: Zoo of quantum-topological phases of matter. Rev. Modern Phys. 89, 2017. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.041004