Internship Master 2

SEMICLASSICAL SPECTRAL SERIES AT LAGRANGE POINTS FOR A QUANTUM MONODROMY OPERATOR

Advisor: M. ROULEUX
Université de Toulon, CNRS, CPT

Abstract: We consider an Hamiltonian with periodic coefficients describing an atom excited by a circularly polarized electric field. We are interested in the semi-classical spectrum of corresponding Floquet operator. With a particular profile for the potential, the problem reduces to finding resonances for a magnetic Schrödinger operator, associated with a fixed point of elliptic type, which is the analogue of a Lagrange point in Celestial Mechanics.

Description:

We consider the time-periodic quantum Hamiltonian $H(t) = -h^2\Delta_x + V + E(t) \cdot x$ on $L^2(\mathbf{R}^3)$ where $E(t)$ is a circularly polarized electric field, and $V = V(r)$ a radially symmetric potential, that will look somewhat like Coulomb potential $-1/r$. We take $E(t) = \cos\omega t\widehat{x}_1 + \sin\omega t\widehat{x}_2$. A central object in the theory of time-periodic quantum Hamiltonian is the Quantum Monodromy (or Floquet) Operator $U(T)$, namely the unitary operator that takes an initial state through a period $T = 2\pi/\omega$. Due to the very peculiar form of $H(t)$, we can show [Tip] that $U(T) = e^{iTP(x,hD_x)/h}$ (up to unitary equivalence), where $P(x, hD_x)$ is a quantum Hamiltonian with symbol $p(x, \xi) = (\xi_1 - 1/\omega)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + V(|x|) - \omega(x_1\xi_2 - x_2\xi_1)$, which we can recognize as a Schrödinger operator with an affine-linear magnetic field. In general the spectrum of $U(T)$ is continuous on the unit circle, but it is interesting to set up an analytic continuation theory for multiphoton processes; these processes are encoded by the resonances of $P(x, hD_x)$, i.e. a sequence of complex eigenvalues $E_n(h)$ for an analytic dilation of $P(x, hD_x)$, that we obtain (in a first attempt) by changing its real symbol $p(x, \xi)$ into $p(e^{i\theta}x, e^{-i\theta}\xi)$, for small $\theta > 0$. Resonances coincide with scattering poles. The real part of the resonances $E_n(h)$ near a given (real) energy E is generally associated with bounded orbits of the Hamilton vector field H_p near E, and its imaginary part to quantum tunneling through the classically forbidden region along a complex continuation of these orbits. Simplest bounded orbit is a course a fixed point in phase space.

We consider here the case, where the bounded orbit consist of a fixed point of elliptic type (stable fixed point) which is the quantum analogue of so called Lagrange point in Celestial Mechanics, i.e. a rest point in a 3 body system, one of them having a negligible mass. Actually there are 2 such Lagrange points. This situation is very specific to Hamiltonian P.

It is obtained by assuming that $r \to V(r)$ has a non-degenerate local minimum precisely at $r_0 = 3\omega^{-2}$ (this is the only possible choice!) Resonances will be found whenever V has also a non-degenerate local maximum at some other (unstable) Lagrange point at $r_1 < 2\omega^{-2}$.

The first part of this Internship consists in reviewing the main arguments in [Tip], which establishes the existence of resonances for a general V. The second part consists in computing the Lagrange points (which is already known). The third part could consist in an attempt to construct the propagator associated with P by Feynman integrals using least action principle in the Euclidean setting, or to compute directly asymptotic solutions (resonant states) in the complex domain. One could also make numerical simulations.

References:

[CFKS] H.Cycon, R.Froese, W.Kirsch, B.Simon. Schrödinger Operators. Springer, 1987.

[GeSi] C.Gérard I.M.Sigal, Space-time picture of semi-classical resonances, CMP 145, p.281-328 (1992)

[O-de-Al] A.Ozorio de Almeida. Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization. Cambridge Univ. Press, 1990.

[Tip] A.Tip. Atoms in circularly polarized fields: the dilation-analytic approach. J.Phys. A Math. Gen. Phys. 16, p.3237-3259 (1983)

SERIES SPECTRALES SEMI-CLASSIQUES ASSOCIEES A UN POINT DE LAGRANGE POUR UN OPERATEUR DE MONODROMIE QUANTIQUE

Sujet de Stage proposé par M. ROULEUX
Université de Toulon, CNRS, CPT

Résumé: On considère un hamiltonien à coefficients périodiques décrivant un atome excité par un champ électrique polarisé circulairement. On s'intéresse au spectre semi-classique de l'opérateur de Floquet correspondant. Pour un profile particulier du potentiel, le problème se ramène à déterminer les résonances pour un opérateur de Schrödinger magnétique, associées à un point fixe elliptique, analogue du point de Lagrange en Mécanique Celeste.

Description:

On considère le Hamiltonien quantique à coefficients periodiques en temps $H(t) = -h^2\Delta_x + V + E(t)\cdot x$ sur $L^2(\mathbf{R}^3)$ où $E(t)$ est un champ électrique polarisé circulairement et $V = V(r)$ un potentiel radial-symétrique, qui va par la suite ressembler au potentiel coulombien $-1/r$. On prend $E(t) = \cos\omega t\widehat{x}_1 + \sin\omega t\widehat{x}_2$. L'objet principalement étudie dans la théorie des Hamiltoniens quantiques dépendant du temps est l'opérateur de Monodromie (ou opérateur de Floquet) noté $U(T)$, qui est l'opérateur unitaire faisant évoluer l'état initial sur une période $T = 2\pi/\omega$. Grâce à la forme très particulière de $H(t)$, on peut montrer [Tip] que (à equivalence unitaire près) $U(T) = e^{iTP(x,hD_x)/h}$, où $P(x, hD_x)$ est un Hamiltonien quantique de symbole $p(x,\xi) = (\xi_1 - 1/\omega)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + V(|x|) - \omega(x_1\xi_2 - x_2\xi_1)$, On reconnait ici un opérateur de Schrödinger avec potentiel vecteur magnétique affine-linéaire. En général le spectre $U(T)$ (sur le cercle unité) est du spectre absolument continu, mais il est intéressant de faire une théorie de prolongement analytique pour illustrer le processus d'excitation multiphotonique; ce processus est codé par le spectre resonant de $P(x, hD_x)$. Par définition, ces résonances sont des suites de valeurs propres complexes $E_n(h)$ d'une “dilatation analytique” de $P(x, hD_x)$, que l'on obtient (en première approximation) en changeant le symbole réel $p(x,\xi)$ en $p(e^{i\theta}x, e^{-i\theta}\xi)$, où $\theta > 0$ est assez petit. (Sous des hypothèses très générales, les résonances sont la même chose que les pôles de la matrice de scattering). La partie réelle des résonances $E_n(h)$ près d'une énergie réelle E est en général associée à un ensemble de trajectoires bornées du champ Hamiltonien H_p près de E, et la partie imaginaire est reliée à l'effet tunnel au travers de la région classiquement interdite en prolongeant ces trajectoires à l'aide d'une variable de temps complexe. L'orbite la plus simple possible est bien entendu un point fixe de l'espace des phases.

On considère ici le cas où l'orbite consiste en un point fixe de type elliptique (point fixe stable), qui est l'analogue "quantique" du "point de Lagrange" en Mécanique Céleste, i.e. un point fixe dans le problème à 3 corps, dont l'un a une masse negligeable. En fait il y a deux tels points de Lagrange. Cette situation est très particulière au Hamiltonien P. Elle s'obtient en supposant que $r \mapsto V(r)$ a un minimum local non-dégénéré précisement en $r_0 = 3\omega^{-2}$ (c'est le seul choix possible!) Les résonances doivent s'obtenir sous l'hypothèse que V a aussi un maximum local non dégénéré en un point de Lagrange (instable) en $r_1 < 2\omega^{-2}$.

La première partie de ce Stage consiste à etudier les principaux arguments de [Tip], où est établie l'existence de résonances pour un potentiel V assez général. La seconde partie consiste à reprendre le calcul des points de Lagrange (ce qui est connu). Dans la troisième partie on pourrait essayer de construire le propagateur associe à P par des intégrales de Feynman utilisant le principe de moindre action dans le formalisme euclidien (avec un temps imaginaire) et/ou de calculer directement les solutions asymptotiques (états resonants) dans le domaine complexe. On peut aussi faire des simulations numeriques pour rechercher les instantons.

Références:

[CFKS] H.Cycon, R.Froese, W.Kirsch, B.Simon. Schrödinger Operators. Springer, 1987.

[GeSi] C.Gérard I.M.Sigal, Space-time picture of semi-classical resonances, CMP 145, p.281-328 (1992)

[O-de-Al] A.Ozorio de Almeida. Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization. Cambridge Univ. Press, 1990.

[Tip] A.Tip. Atoms in circularly polarized fields: the dilation-analytic approach. J.Phys. A Math. Gen. Phys. 16, p.3237-3259 (1983)